

Inferencia Estadística Examen VI

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Inferencia Estadística Examen VI

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2026

Asignatura Inferencia Estadística.

Curso Académico 2026-27.

Grado Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Desiré Romero Molina.

Descripción Parcial 1. Temas 1, 2 y 3.

Fecha 22 de Octubre de 2026.

Duración 60 minutos.

Ejercicio 1. Sea $X_1, \dots, X_n$ una muestra aleatoria simple de una distribución normal con media μ y varianza σ^2 . Determinar la distribución de:

$$V(X_1, \dots, X_{n-1}) = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (X_i - \mu)^2}{\sigma^2}$$

Ejercicio 2. Sea $X_1, \dots, X_n$ una muestra aleatoria simple de una distribución con función de densidad:

$$f_{\theta}(x) = \frac{\theta}{x^{\theta+1}}, \quad x > 1.$$

Encontrar un estadístico suficiente y completo de esta distribución. Además, dado $T(X_1, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^n X_i$, ¿es este estadístico suficiente y completo? Justificar la respuesta.

Ejercicio 1. Sea $X_1, \dots, X_n$ una muestra aleatoria simple de una distribución normal con media μ y varianza σ^2 . Determinar la distribución de:

$$V(X_1, \dots, X_{n-1}) = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (X_i - \mu)^2}{\sigma^2}$$

Como $X_i \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, tipificando cada variable obtenemos que:

$$Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

Por la construcción de la distribución χ^2 a partir de variables normales, puesto que Z_i son independientes por ser X_i independientes, se tiene que:

$$\sum_{i=1}^{n-1} Z_i^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2(n-1)$$

Por tanto, $V \rightsquigarrow \chi^2(n-1)$.

Ejercicio 2. Sea $X_1, \dots, X_n$ una muestra aleatoria simple de una distribución con función de densidad:

$$f_\theta(x) = \frac{\theta}{x^{\theta+1}}, \quad x > 1.$$

Encontrar un estadístico suficiente y completo de esta distribución. Además, dado $T(X_1, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^n X_i$, ¿es este estadístico suficiente y completo? Justificar la respuesta.

Buscamos demostrar que se trata de una familia exponencial uniparamétrica. Comprobamos las condiciones:

1. El espacio paramétrico es $\Theta = \mathbb{R}^+$, que es un intervalo de $\mathbb{R}$.
2. El soporte de la distribución es $]1, +\infty[$, que no depende del parámetro θ .
3. Para la tercera condición, expresamos la función de densidad en forma exponencial:

$$f_\theta(x) = \frac{\theta}{x^{\theta+1}} = \exp(\ln(\theta) - (\theta + 1) \ln(x))$$

Identificando términos con la estructura canónica:

$$Q(\theta) = -(\theta + 1), \quad T(x) = \ln(x), \quad D(\theta) = \ln(\theta), \quad S(x) = 0.$$

Por tanto, la familia $\{f_\theta : \theta > 0\}$ es una familia exponencial uniparamétrica. Por el teorema de las familias exponenciales, el estadístico:

$$T^*(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n T(X_i) = \sum_{i=1}^n \ln(X_i) = \ln \left(\prod_{i=1}^n X_i \right)$$

es suficiente para el parámetro θ . Además, como Q es una función continua y no constante definida en un intervalo, su imagen $Im(Q)$ contiene un abierto de $\mathbb{R}$ (en concreto, $Im(Q) =]-\infty, -1[$). Por lo tanto, el estadístico $T^*(X_1, \dots, X_n)$ es completo para θ .

Por otro lado, la exponencial $\exp : \mathbb{R}^+ \rightarrow]1, +\infty[$ es una función biyectiva, por lo que:

$$T(X_1, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^n X_i = \exp \left(\sum_{i=1}^n \ln(X_i) \right) = \exp(T^*(X_1, \dots, X_n))$$

es también un estadístico suficiente para θ . Veamos ahora que T es completo. Sea g una función medible tal que:

$$E_\theta[g(\exp(T^*))] = 0 \quad \forall \theta > 0.$$

Como T^* es completo y $g \circ \exp$ es una función medible, se sigue que:

$$P[g(T) = 0] = P[g(\exp(T^*)) = 0] = 1.$$